

INF1130 SESSION A07
DEVOIR 1 SOLUTIONS
Vendredi le 19 octobre 2007

Question 1 sur la logique propositionnelle (20 points).

Le manuel d'entretien de votre nouveau gadget est spécialement mal écrit. Par exemple, on retrouve le texte suivant pour nous aider à diagnostiquer les *pannes de type 1*:

"Si le voyant est allumé, alors l'indicateur est défectueux ou la pile est à plat. Lorsque l'indicateur fonctionne et que la pile n'est pas à plat, le voyant est allumé."

Partie a (5 points). Traduisez le texte ci-dessus à l'aide de la logique propositionnelle, en spécifiant bien quelles sont les propositions élémentaires (atomiques).

Solution. Soit A la proposition que le voyant est allumé, D la proposition que l'indicateur est défectueux et P la proposition que la pile est à plat. Alors le texte se traduit à

$$(A \rightarrow (D \vee P)) \wedge ((\neg D \wedge \neg P) \rightarrow A).$$

Partie b (10 points). Trouvez l'énoncé le plus simple possible qui est équivalent à celui que vous avez obtenu à la partie **a** de cette question pour diagnostiquer une panne de type 1.

Solution. Par de Morgan, $\neg(D \vee P) \Leftrightarrow \neg D \wedge \neg P$, donc on peut traiter $D \vee P$ comme une proposition atomique q et la proposition de la partie **a** se simplifie à $(A \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow A)$. Voici sa table de vérité:

A	q	$A \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow A$	$(A \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow A)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

En comparant la table de vérité de $(A \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow A)$ avec celle de q on voit que ces deux propositions sont logiquement équivalentes, d'où

$$(A \rightarrow (D \vee P)) \wedge ((\neg D \wedge \neg P) \rightarrow A) \Leftrightarrow (D \vee P).$$

Puisque $D \vee P$ ne peut pas être simplifié, c'est l'énoncé le plus simple possible qui est équivalent à celui obtenu en la partie **a** de la question.

Partie c (5 points). Retraduisez en français votre nouvel énoncé.

Solution. L'indicateur est défectueux ou la pile est à plat.

Question 2 sur la logique des propositions quantifiées (30 points, 5 pour chaque partie).

Soit U , l'univers du discours, l'ensemble des animaux.

Soit $C(x)$ le prédicat que x est un chien (canin).

Soit $F(y)$ le prédicat que y est un chat (félin).

Soit $D(x,y)$ le prédicat que x déteste y .

Pour chacune des assertions suivantes, exprimez l'assertion sous la forme d'une proposition quantifiée et exprimez la négation de cette assertion d'abord sous forme d'une proposition quantifiée et puis comme une assertion en français. Vous êtes libre d'utiliser ou de ne pas utiliser l'opérateur tel que (barre verticale). Seul un prédicat peut être nié.

a. Tous les chiens détestent tous les chats.

Solution. $(\forall x|C(x))(\forall y|F(y))D(x,y)$ ou $\forall x(C(x) \rightarrow (\forall y(F(y) \rightarrow D(x,y))))$.

Négation: $(\exists x|C(x))(\exists y|F(y))\neg D(x,y)$ ou $\exists x(C(x) \wedge (\exists y(F(y) \wedge \neg D(x,y))))$.

Il y a un chien et un chat qu'il ne déteste pas. (ou: Il y a un chien qui ne déteste pas tous les chats).

b. Certains chiens détestent tous les chats.

Solution. $(\exists x|C(x))(\forall y|F(y))D(x,y)$ ou $\exists x(C(x) \wedge (\forall y(F(y) \rightarrow D(x,y))))$.

Négation: $(\forall x|C(x))(\exists y|F(y))\neg D(x,y)$ ou $\forall x(C(x) \rightarrow (\exists y(F(y) \wedge \neg D(x,y))))$.

Pour tout chien il y a un chat qu'il ne déteste pas.

c. Certains chiens détestent certains chats.

Solution. $(\exists x|C(x))(\exists y|F(y))D(x,y)$ ou $\exists x(C(x) \wedge (\exists y(F(y) \wedge D(x,y))))$.

Négation: $(\forall x|C(x))(\forall y|F(y))\neg D(x,y)$ ou $\forall x(C(x) \rightarrow (\forall y(F(y) \rightarrow \neg D(x,y))))$.

Aucun chien ne déteste aucun chat.

d. Il y a un chat que tous les chiens détestent.

Solution. $(\exists y|F(y))(\forall x|C(x))D(x,y)$ ou $\exists y(F(y) \wedge (\forall x(C(x) \rightarrow D(x,y))))$.

Négation: $(\forall y|F(y))(\exists x|C(x))\neg D(x,y)$ ou $\forall y(F(y) \rightarrow (\exists x(C(x) \wedge \neg D(x,y))))$.

Pour tout chat il y a un chien qui ne le déteste pas.

e. Pour tout chat il y a un chien qui le déteste.

Solution. $(\forall y|F(y))(\exists x|C(x))D(x,y)$ ou $\forall y(F(y) \rightarrow (\exists x(C(x) \wedge D(x,y))))$.

Négation: $(\exists y|F(y))(\forall x|C(x))\neg D(x,y)$ ou $\exists y(F(y) \wedge (\forall x(C(x) \rightarrow \neg D(x,y))))$.

Il y a un chat qui n'est détesté par aucun chien.

f. Pour tout chien il y a un chat qu'il déteste.

Solution. $(\forall x|C(x))(\exists y|F(y))D(x,y)$ ou $\forall x(C(x) \rightarrow (\exists y(F(y) \wedge D(x,y))))$.

Négation: $(\exists x|C(x))(\forall y|F(y))\neg D(x,y)$ ou $(\exists x(C(x) \wedge (\forall y(F(y) \rightarrow \neg D(x,y))))$.

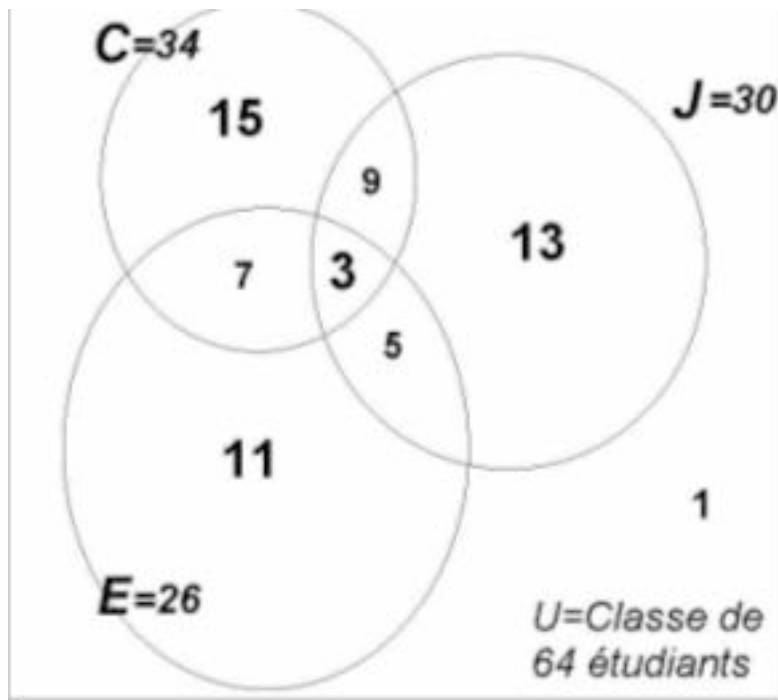
Il y a un chien qui ne déteste aucun chat.

Question 3 sur les ensembles (20 points).

Dans une certaine école de musique il y a 64 étudiants dont 34 chantent, 30 jouent d'un instrument, 26 écrivent de la musique, 12 chantent et jouent, 10 chantent et écrivent, 8 jouent et écrivent, et 3 chantent et jouent et écrivent.

Solution: D'abord on dessine un diagramme de Venn dont voici la table d'appartenance avec cardinalité, où C est l'ensemble de chanteurs, J l'ensemble de joueurs et E l'ensemble de compositeurs (musiciens qui écrivent de la musique):

C	J	E	#
1	1	1	3
0	1	1	5 (= 8 - 3)
1	0	1	7 (= 10 - 3)
1	1	0	9 (= 12 - 3)
0	0	1	11 (= 26 - 3 - 5 - 7)
0	1	0	13 (= 30 - 3 - 5 - 9)
1	0	0	15 (= 34 - 3 - 7 - 9)
0	0	0	1 (= 64 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15)



Partie a (6 points). Combien y a-t-il d'étudiants sans aucun talent musical sauf pour critiquer la musique pour un journal local? Justifiez.

Solution: Il y en a 1 selon la table d'appartenance.

Partie b (4 points). Combien de triplets ordonnés (x,y,z) y a-t-il tels que x chante et joue mais n'écrit pas, y chante et écrit mais ne joue pas et z écrit et joue mais ne chante pas? Justifiez.

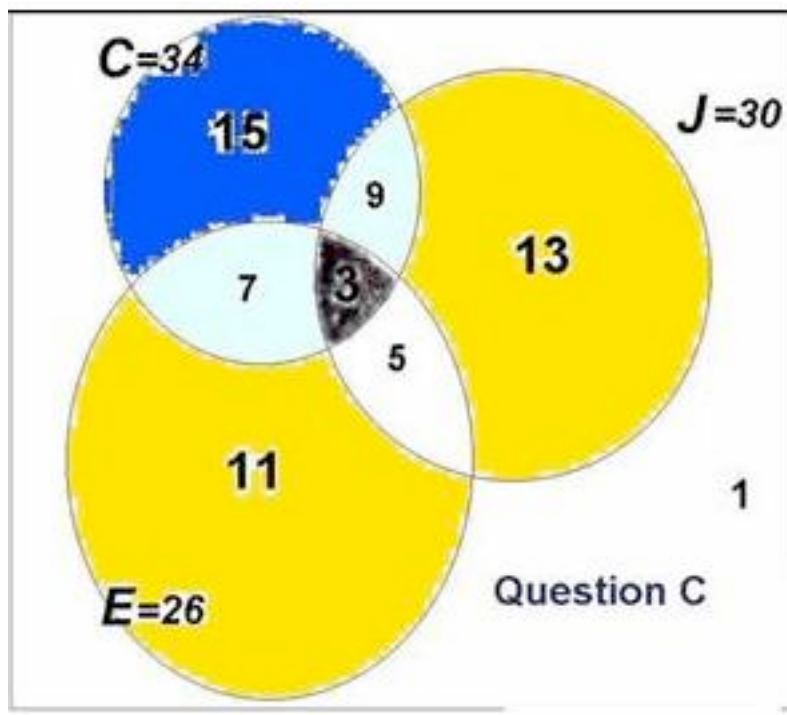
Solution: Il y en a $\#((C \cap J) - E) \times ((C \cap E) - J) \times ((E \cap J) - C)$

$$= (\#((C \cap J) - E)) \times (\#((C \cap E) - J)) \times (\#((E \cap J) - C))$$

$$= 9 \times 7 \times 5 = 315 \text{ (selon la table d'appartenance).}$$

Partie c (4 points). On dit qu'un étudiant est un *spécialiste* s'il écrit mais ne joue pas ou s'il joue mais n'écrit pas. Combien y a-t-il d'étudiants qui sont soit des spécialistes mais pas des chanteurs, soit des chanteurs mais pas des spécialistes? Justifiez.

Solution. L'ensemble des spécialistes est $E \oplus J$ et donc l'ensemble requis par la question est $(E \oplus J) \oplus C$. En faisant la table d'appartenance de cet ensemble on trouve qu'il est composé des musiciens avec un nombre impair de talents; sa cardinalité est $3 + 11 + 13 + 15 = 42$.



Partie d (6 points). Le directeur de l'école cherche à former un orchestre de chambre parmi les étudiants qui jouent mais n'écrivent pas et ne chantent pas. Combien y a-t-il d'orchestres possibles avec au moins 1 joueur? Avec au moins 2? Avec au moins 3? Justifiez.

Solution. L'ensemble des musiciens qui jouent mais ne font rien d'autre est $J - (C \cup E)$, de cardinalité 13. Un orchestre est un sous-ensemble de $J - (C \cup E)$, donc il y a $2^{13} = 8192$ orchestres, dont 1 vide et donc il y en a 8191 avec au moins 1 musicien. Parmi ceux-ci, 13 consistent d'un seul musicien, donc il y en a 8178 avec au moins 2 musiciens. Parmi ceux-ci, $13 \cdot 12 / 2 = 78$ sont composés de 2 musiciens (comptez les paires non-ordonnées de 13 musiciens), donc il y en a 8100 avec au moins 3 musiciens.

Question 4 sur les fonctions et l'arithmétique modulaire (20 points).

Soit $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et soit $S = \{-1, 0, 1\}$.

Soit f la fonction de E vers S définie par $f(x) = -1$ si $x > 0$, $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(0) = 0$.

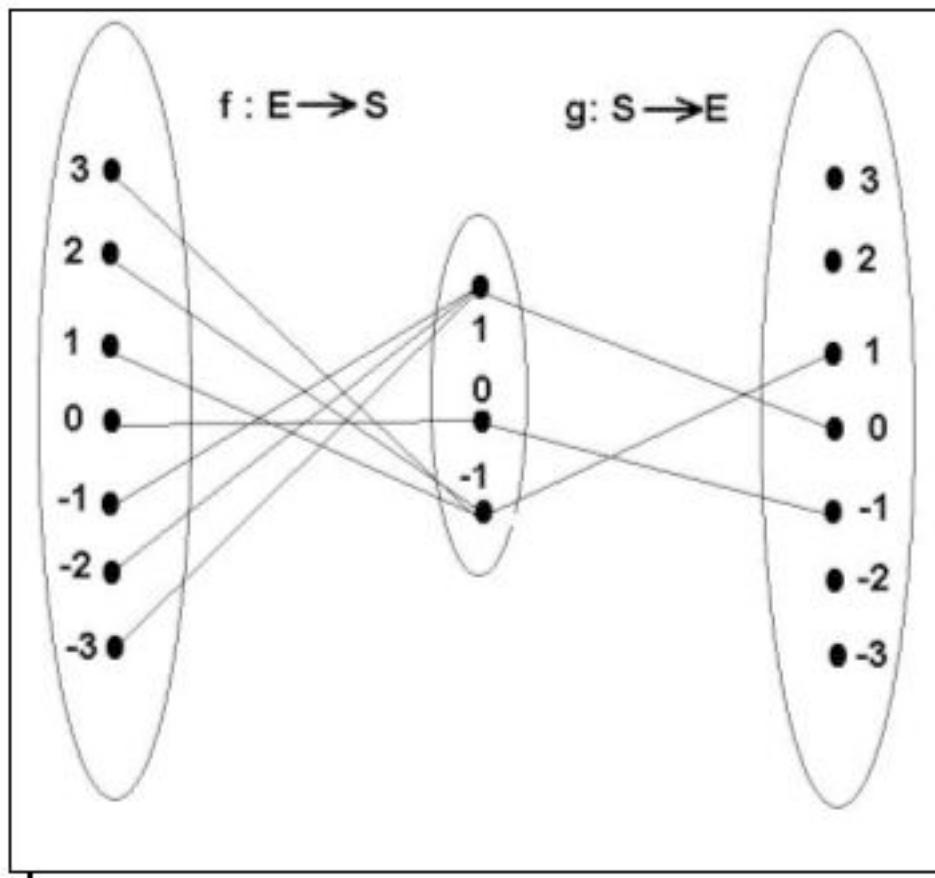
Soit g la fonction de S vers E définie par $g(x) = (x \bmod 3) - 1$.

Pour chacune des fonctions f , g , $f \circ g$, $g \circ f$, où o veut dire la composition de deux fonctions:

Partie a (4 points). Dessinez le diagramme de cette fonction.

Solution. Pour f , il y a les flèches $(3, -1), (2, -1), (1, -1), (0, 0), (-1, 1), (-2, 1), (-3, 1)$.

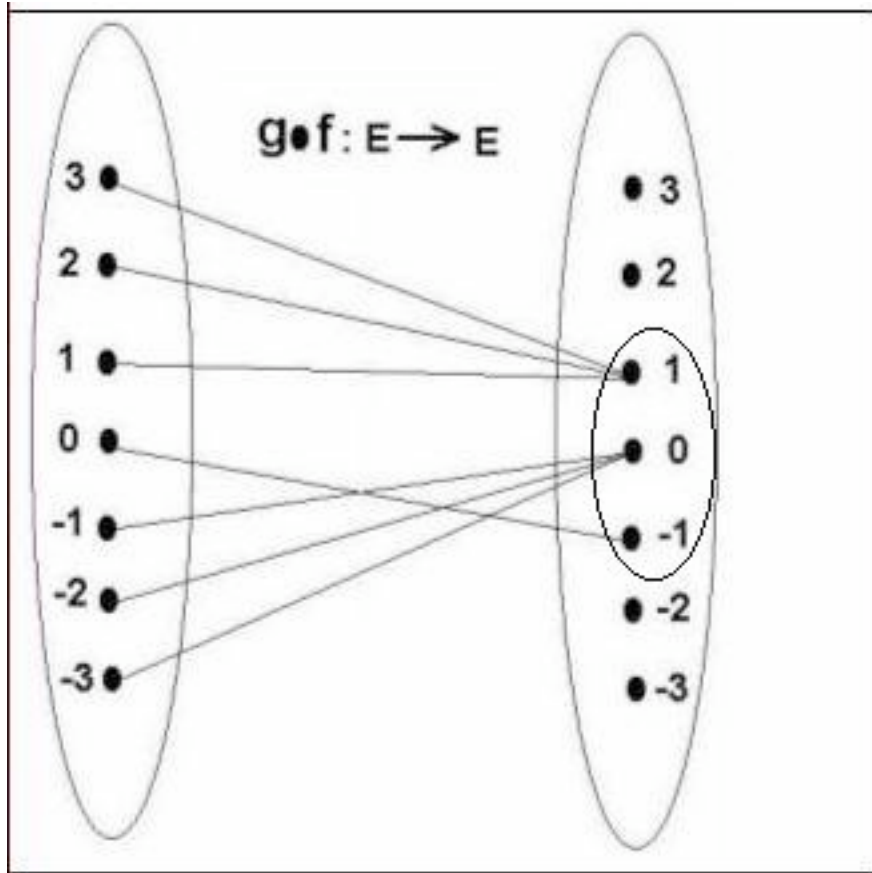
Pour g , il y a les flèches $(1, 0), (0, -1), (-1, 1)$.



Pour $f \circ g$, il y a les flèches $(1,0),(0,1),(-1,-1)$.

<DIAGRAMME À REMPLIR>

Pour $g \circ f$, il y a les flèches $(3,1),(2,1),(1,1),(0,-1),(-1,0),(-2,0),(-3,0)$.



Partie b (8 points). Dites si la fonction est injective, si elle est surjective, si elle est bijective. Justifiez.

Solution. f : n'est pas injective puisque, par exemple, $f(1)=f(2)=-1$, donc n'est pas bijective; est surjective puisque $f(-1)=1, f(0)=0$ et $f(1)=-1$, donc tout le codomaine est couvert.

g : est injective puisque les images de 1, 0 et -1 sont toutes distinctes (0, -1 et 1 respectivement); n'est pas surjective puisque, par exemple, $f(x) \neq 2$ pour tout x dans le domaine, donc n'est pas bijective.

$f \circ g$: est injective puisque les images de 1, 0 et -1 sont toutes distinctes (0, 1 et -1 respectivement); est surjective puisque tous les membres 1, 0 et -1 du codomaine sont touchés; donc est bijective.

À noter: $f \circ g$ est bijective même si f n'est pas injective et g n'est pas surjective. Pouvez-vous trouver une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que $f \circ g$ soit injective? surjective? bijective? La solution est sur le site web (la solution du Devoir 1 de la session A03).

$g \circ f$: n'est pas injective puisque, par exemple, $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2) = 1$, donc n'est pas bijective; n'est pas surjective puisque, par exemple, $(g \circ f)(x) \neq 2$ pour tout x dans le domaine.

Partie c (4 points). Si la fonction n'est pas surjective, donnez son image (étendue).

Solution. L'étendue des deux fonctions non-surjectives g et $g \circ f$ est $\{1, 0, -1\}$.

Partie d (4 points). Si la fonction est bijective, dessinez le diagramme de son inverse (sa réciproque).

Solution. Pour l'inverse de la seule fonction bijective $f \circ g$, il y a les flèches $(1, 0), (0, 1), (-1, -1)$. Puisque l'inverse de $f \circ g$ est identique à $f \circ g$, son diagramme est le même, sauf que $f \circ g$ devrait être remplacé par $(f \circ g)^{-1}$:

<DIAGRAMME À REMPLIR >

Question 5 sur les suites (15 points dont 9 pour la partie a).

Partie a. Évaluez les sommes suivantes: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (3i + 2j)$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i - j)$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j$.

Solution.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (3i + 2j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2j = \sum_{i=1}^n 3in + n \sum_{j=1}^n 2j = 3n \sum_{i=1}^n i + 2n \sum_{j=1}^n j = 5n(n+1)/2 \\ &= 5n^2(n+1)/2. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i - j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i = 0$$

(dans la première somme on change l'ordre de sommation et dans la deuxième on échange les rôles de i et j).

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = n \sum_{j=1}^n j = n(n(n+1)/2) = n^2(n+1)/2.$$

Partie b. Une suite géométrique a pour premier terme x , pour deuxième terme y et pour dernier terme z . En supposant que $x \neq y$, donnez une formule pour la somme de la suite en fonction de x , y et z .

Solution. La formule pour la somme d'une suite géométrique est

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} \text{ si } r \neq 1.$$

Ici $a=x$ et $y = ar$, d'où $r=y/x$. Puisque $x \neq y$, $r \neq 1$. Enfin $z=ar^n$, d'où $ar^{n+1}=zr=zy/x$. En substituant ces valeurs dans le côté droit de la formule on obtient $\frac{(zy/x) - x}{(y/x) - 1}$ ce qui se simplifie à $\frac{zy - x^2}{y - x}$.

Question 6 sur le comportement asymptotique des fonctions (20 points).

Partie a (10 points). Pour chacune des fonctions suivantes, donnez le plus petit nombre réel n tel que la fonction est dans $O(x^n)$.

$$f_1(x) = (x^3+2x)/(2x+1); f_2(x) = (x^2+1)/(x+1); f_3(x) = 2x^3+x^2\log_2(x); f_4(x) = (\log(x))^2+\sqrt{x};$$

$$f_5(x) = \sum_{i=1}^x i^2.$$

Solution. Pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ on simplifie le numérateur et le dénominateur en ne gardant que le terme avec l'exposant le plus grand sans coefficient et puis on fait la division. Ainsi

$f_1(x)$ se simplifie à $x^3/x = x^2$ ($n=2$)

et $f_2(x)$ se simplifie à $x^2/x = x$ ($n=1$).

Pour $f_3(x)$ et $f_4(x)$ on utilise le fait que $\log(x)$ croît moins vite que toute puissance positive de x . Ainsi $x^2\log_2(x)$ sera dominé par $2x^3$ et peut être éliminé: $f_3(x)$ se simplifie à x^3 ($n=3$).

De la même façon, $(\log(x))^2$ sera dominé par $\sqrt{x}$; puisque $\log(x)$ croît moins vite que $x^{1/4}$, donc $f_4(x)$ se simplifie à $\sqrt{x}$ ($n=0,5$).

Pour $f_5(x)$ on remplace chaque terme par le plus grand terme, x^2 , ce qui augmente la valeur de la somme. Donc $f_5(x) \leq x \cdot x^2 = x^3$ ($n=3$). En fait on a démontré que $n \leq 3$ mais pas que $n \geq 3$. Pour compléter la preuve on peut soit utiliser le calcul intégral, soit procéder ainsi. On divise la somme en 2 parties:

$$\sum_{i=1}^x i^2 = \sum_{i=1}^{\text{plancher}(x/2)} i^2 + \sum_{i=1+\text{plancher}(x/2)}^x i^2. \quad \text{La première somme est non-négative. Pour la}$$

deuxième, on constate que chaque terme $\geq (x/2)^2$ et il y a au moins $x/2$ termes, donc la deuxième somme $\geq x^3/8$. La somme originale $\geq x^3/8$, d'où $n \geq 3$. Puisque la preuve n'a pas été demandée, il suffit de donner la bonne réponse: $n=3$.

Partie b (10 points). Étant donné deux fonctions $f_i(x)$ et $f_j(x)$, on dit que $f_i(x)$ *croît moins vite* que $f_j(x)$ si $f_i(x)$ est dans $O(f_j(x))$ mais $f_j(x)$ n'est pas dans $O(f_i(x))$ et on dit que $f_i(x)$ et $f_j(x)$ *croissent à la même vitesse* si $f_i(x)$ est dans $O(f_j(x))$ et $f_j(x)$ est dans $O(f_i(x))$. Classez les fonctions de la partie **a** selon leur taux de croissance: si $f_i(x)$ croît moins vite que $f_j(x)$, alors écrivez $f_i(x)$ à gauche de $f_j(x)$ et si $f_i(x)$ et $f_j(x)$ croissent à la même vitesse, alors écrivez l'une au-dessous de l'autre. Par exemple, si $f_1(x)$ était x , $f_2(x)$ était $x+1$ et $f_3(x)$ était x^2 , alors il faudrait écrire

$$\begin{array}{cc} f_1 & f_3 \\ f_2 & \end{array}$$

Solution: Il suffit de comparer les estimés des fonctions:

$$\begin{array}{cccc} f_4 & f_2 & f_1 & f_3 \\ & & & f_5 \end{array}$$

Question 7 sur les séquences de la bioinformatique et les preuves (25 points).

Soit $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$ deux séquences de lettres de l'alphabet $\{A,C,G,T\}$. Un *alignement* entre ces deux séquences est donné par deux séquences de la même longueur

$$\begin{array}{c} a_1a_2\dots a_k \\ b_1b_2\dots b_k \end{array}$$

de symboles de l'alphabet $\{A,C,G,T,_ \}$, avec b_i écrit au-dessous de a_i pour tout i , tel que:

- a)** pour tout i , au moins un des deux symboles a_i et b_i doit être une lettre - c'est-à-dire, $\forall i((a_i \neq _') \vee (b_i \neq _'))$.
- b)** si l'on efface les symboles $_'$ de la séquence $a_1a_2\dots a_k$ on obtient la séquence $x_1x_2\dots x_n$ et si l'on efface les symboles $_'$ de la séquence $b_1b_2\dots b_k$ on obtient la séquence $y_1y_2\dots y_m$.

Par exemple, voici un alignement des séquences *ACGTGA* et *ACTGGGA*:

$$\begin{array}{cccccccc} A & C & _ & G & T & G & _ & _ & A \\ A & _ & \overline{C} & - & T & G & \overline{G} & \overline{G} & A \end{array}$$

Le *coût* de l'alignement

$$\begin{array}{c} a_1a_2\dots a_k \\ b_1b_2\dots b_k \end{array}$$

est le nombre de paires de symboles (a_i, b_i) tels que $a_i \neq b_i$. Dans l'exemple dessus $a_i \neq b_i$ pour $i = 2, 3, 4, 7$ et 8 , donc le coût de cet alignement est 5.

Partie a (3 points). Donnez des alignements de coût 3, 4 et 5 entre les séquences *AC* et *CGA*.

Solution.

$$\begin{array}{ccc} A & C & _ \\ C & G & \overline{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & _ & C \\ C & \overline{G} & _ & \overline{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & C & _ \\ _ & _ & \overline{C} & \overline{G} & \overline{A} \end{array}$$

Partie b (4 points). Trouvez un alignement entre *ACGTGA* et *ACTGGGA* de coût minimum.

Solution:

$$\begin{array}{c} AC_GTGA \\ ACTGGGA \end{array}$$

Cet alignement est de coût 2. Pour un coût <2 il faut au plus un $_'$ et puisque les longueurs des séquences sont 6 et 7 le nombre des $_'$ doit être impair, donc exactement un $_'$. Parmi les 7 alignements avec un seul $_'$ le coût minimum est 2 et l'alignement dessus est le seul de coût 2.

Dans la suite, le symbole ' _ ' sera appelé 'espace'.

Partie c (8 points). Quel est le coût maximum d'un alignement entre $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$ en fonction de n et de m ? Justifiez votre réponse.

Solution. $n+m$. Le coût d'un alignement ne peut pas être plus grand que sa longueur k et puisqu'on ne peut pas aligner un espace avec un autre espace, $k \leq n+m$, d'où aucun alignement ne peut avoir un coût $> n+m$. Par contre, on peut toujours trouver un alignement de coût $n+m$ en mettant m espaces avant $x_1x_2\dots x_n$ et n espaces après $y_1y_2\dots y_m$, donc $n+m$ est le coût maximum.

Partie d (10 points). Démontrez qu'il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$ si et seulement si $n = m$ et $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_m$ (les séquences sont de la même longueur et pour tout i on a $x_i = y_i$). Notez qu'il faut démontrer deux énoncés:

a) si $n = m$ et $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_m$, alors il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$;

b) s'il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$, alors $n = m$ et $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_m$.

Solution.

Preuve de l'énoncé **a)**: Supposons que $n = m$ et $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_m$, c'est-à-dire, les séquences sont de la même longueur et pour tout i on a $x_i = y_i$. Alors on met chaque y_i directement au-dessous de x_i , ce qui donne un alignement de coût 0.

Preuve de l'énoncé **b)**: Supposons qu'il existe un alignement de coût 0 entre $x_1x_2\dots x_n$ et $y_1y_2\dots y_m$. Alors un tel alignement ne peut pas avoir des espaces puisqu'un espace ne peut pas être au-dessous d'un autre espace, ce qui implique que $k=n=m$. L'alignement doit être

$x_1x_2\dots x_m$

$y_1y_2\dots y_m$

avec y_i directement au-dessous de x_i pour tout i . Puisque le coût est 0, on a $x_i = y_i$ pour tout i , CQFD.